

050 (G)

(JULY, 2006)
(New Course)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

સૂચનાઓ :

1. બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
2. પ્રત્યેક પ્રશ્નના વિભાગીય સૂચના પ્રમાણે જ જવાબ લખો.
3. પ્રત્યેક વિભાગ ઉત્તરવહીમાં નવા પાના પર શરૂ કરો.

વિભાગ - A

નીચે આપેલથી 15 હેતુલક્ષી પ્રશ્નોમાં દરેકનો એક ગુણ છે. તે પ્રત્યેકના ઉત્તરો માત્ર સાચા જવાબનો માત્ર 15
અનુક્રમ (a) or (b) or (c) or (d) દ્વારા જ આપો.

1. $d((|7|, -8), (|-7|, -3)) = ?$

- | | |
|--------|---------|
| a) - 5 | b) 11 |
| c) 5 | d) - 11 |

2. (5, 6) અને (-3, 6) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝીય સમીકરણ કયું છે ?

- | | |
|----------------|----------------|
| a) $y - 6 = 0$ | b) $y + 6 = 0$ |
| c) $x - 5 = 0$ | d) $x + 3 = 0$ |

3. બિન્દુ (3, -4) કેન્દ્રવાળા અને Y- અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ કયું છે ?

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 16 = 0$ | b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ |
| c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ | d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ |

4. પરવલય $x^2 = -6y$ ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુના યામ શું થાય ?

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $(\pm 3, -\frac{3}{2})$ | b) $(-\frac{3}{2}, 3)$ |
| c) $(-\frac{3}{2}, -3)$ | d) $(\pm 3, \frac{3}{2})$ |

5. $4x^2 - y^2 = 9$ ના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કયું છે ?
- a) $\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$ b) $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$
- c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$
6. નીચેપૈકી એકમ સદિશ કયો છે ?
- a) $(\cos \alpha, 2\sin \alpha)$ b) $(\sin \alpha, \cos \alpha)$
- c) $(1, -1)$ d) $(2\cos \alpha, \sin \alpha)$
7. $\bar{x} = (1, -1)$ તથા $\bar{y} = (1, 0)$ તો $\text{Comp}_{\bar{x}} \bar{y} = ?$
- a) 1 b) 0
- c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) \bar{y}
8. $x + 2y + z = 1$ અને $\bar{r} = (0, 0, 0) + K(2, 1, -1)$, $K \in R$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કયું છે ?
- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$
- c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$
9. સમતલ $\bar{r} \cdot (2, -2, 1) = -12$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ ને સ્પર્શે તો સ્પર્શબિન્દુના યામ શું થાય ?
- a) $(1, -4, 2)$ b) $(-1, 4, -2)$
- c) $(-1, 4, 2)$ d) એક પણ નહીં
10. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{e^{4x} - e}{x - \frac{1}{4}} = ?$
- a) $4e$ b) $\frac{e}{4}$
- c) $-4e$ d) $\log_e 4$
11. $\sin^{-1}x$ નું $\cos^{-1}x$ વિશે વિકસિત કયું છે ?
- a) 1 b) -1
- c) 0 d) એક પણ નહીં

12. ધાતુની વર્તુળાકાર પ્લેટને ગરમ કરતાં તેની ત્રિજ્યા 2% વધે છે. જે ત્રિજ્યા 10 સે.મી. હોય તો, ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો કેટલો છે ?
- a) 4π (સે.મી.)² b) 4π સે.મી.
c) 20π (સે.મી.)² d) 2π (સે.મી.)²
13. $\int_{-1}^0 |x| \cdot dx = ?$
- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$
c) 1 d) એક પણ નહીં
14. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$ નું પરિમાણ તથા કક્ષા કેટલી છે ?
- a) 6 તથા 1 b) 3 તથા 2
c) 2 તથા 2 d) 1 તથા 1
15. ઉર્ધ્વ દિશામાં પ્રક્ષિપ્ત એક પદાર્થ વધુમાં વધુ 50 મી. ઉંચાઈએ પહોંચે છે. 25 મી. ઉંચાઈએ તેના વેગનું માન કેટલું થાય ?
- a) $7\sqrt{10}$ મી/સેકન્ડ b) $7\sqrt{10}$ મી/સેકન્ડ²
c) $-7\sqrt{10}$ મી/સેકન્ડ d) 490 મીટર

વિભાગ - B

નીચેના 16 થી 30 પ્રશ્નો કે જે દરેકનાં 1 ગુણ છે. તેના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

15

16. A (3, 5) અને B (2, 6) ને જોડતાં રેખાખંડનું X- અક્ષ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ? તે મેળવો.
17. $x = 2$, $x = -2$, $y = 3$, $y = 1$ થી બનતા લંબચોરસનો વિકર્ણ વ્યાસ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(-1, 1) અને (-1, -4) માંથી પસાર થતા, તથા $\frac{5}{2}$ ત્રિજ્યા વાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

18. પરવલય $y^2 = 2x$ પરના શિરોબિન્દુ સિવાયના એક બિન્દુનો x- યામ તેના y- યામ કરતા બમણો હોય તો, તે બિન્દુના યામ શોધો.

19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ના નિયામક વૃત્તના પ્રચલ સમીકરણ શોધો.
20. (2, 2, 1) અને (3, 2, 2) બંનેને લંબ એકમ સદિશ મેળવો.
21. (1, 1, 1) નો (2, 2, 1) પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ શોધો.
22. $P(4, -5, 3)$ નું $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}$ થી લંબઅંતર મેળવો.

23. $\frac{d}{dx}(\sin^3 x)$ મેળવો.

અથવા

$\frac{d}{dx}(e^{-2006 \log_e x})$ મેળવો.

24. $\int \frac{e^x}{\sqrt{2x^2 + 3}} \cdot dx$ મેળવો.

25. $y = \cos x$, X- અક્ષ અને રેખાઓ $x = 0$, $x = \pi$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

26. $\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx$ મેળવો.

અથવા

$\int \frac{1}{9 + 4x^2} \cdot dx$ મેળવો.

27. $\int_1^{4013} (\operatorname{Cosec}^{-1} x + \operatorname{Sec}^{-1} x) \cdot dx$, $|x| \geq 1$ મેળવો.

28. રેખાઓની સંહિતિ $y = mx + c$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં m , અને c સ્વૈર અચલ છે.)

29. રેખીય ગતિ કરતા કણ નું t સમયે અંતર x હોય, તથા $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 8$ હોય તો, તેનો વેગ 0 ક્યારે થશે ?

30. બે દડા અનુક્રમે 19.6 મી./સે. તથા 9.8 મી./સે. ની ઝડપે ઉર્ધ્વ દિશામાં ફેંક્યા છે. જ્યારે પ્રથમ દડાની મહત્તમ ઊંચાઈ હોય ત્યારે બીજા દડાની જમીન થી ઊંચાઈ શોધો.

વિભાગ - C

નીચેના 31 થી 40 પ્રશ્નો, કે જે દરેકનાં બે ગુણ છે, તેના માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

20

31. રેખાના ઢાળની મદદથી બતાવો કે $A (12, 8)$, $B (-2, 6)$, $C (6, 0)$ કાટકોણ ત્રિકોણના શિરોબિન્દુઓ છે.

અથવા

$A (-3, 2)$, $B (7, 6)$ હોય તો \overline{AB} ના લંબ દ્વિભાજકનું સમીકરણ મેળવો.

32. પરવલય $x^2 = 12y$ નું શિરોબિન્દુ અને તેના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ ધ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

33. જેના ઉત્કેન્દ્રીય કોણના માપ α , β હોય, તેવા ઉપવલય $x^2b^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ના બે બિન્દુઓ ને જોડતી જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x}{a} \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \frac{y}{b} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \text{ થાય. સાબિત કરો.}$$

34. જો અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતાઓ અનુક્રમે e_1 અને e_2 હોય તો બતાવો કે $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 \cdot e_2^2$.

અથવા

અતિવલય ના બિંદુ $P(\alpha)$ અને $Q(\beta)$ ને જોડતી જીવા કેન્દ્ર $C(0, 0)$ આગળ કાટખૂણો આંતરે તો સાબિત કરો કે $a^2 + b^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = 0$.

35. સાબિત કરો : $[\bar{x} + \bar{y} \quad \bar{y} + \bar{z} \quad \bar{z} + \bar{x}] = 2 [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]$

36. \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} સમતલીય સદિશ હોય તો સાબિત કરો કે $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$, $\bar{z} + \bar{x}$ પણ સમતલીય સદિશ છે.

અથવા

$$(\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y}) = 63 \text{ તથા } |\bar{x}| = 8|\bar{y}| \text{ તો } |\bar{x}| \text{ શોધો.}$$

37. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ અને $2x + 3y - z = 5\sqrt{14}$ ના છેદથી બનતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

38. જો $x = a(1 - \cos\theta)$ અને $y = a(\theta - \sin\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$, $a \neq 0$ હોય તો, $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

39. $f(x) = \sin x + \cos x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માટે રોલનું પ્રમેય લાગુ પડે, તો તે લગાડી C શોધો.

અથવા

વિધેય $f(x) = 5x^3 - 15x^2 - 120x + 3$ કયા અંતરાલમાં વધતું છે, અને કયા અંતરાલમાં ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

40. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \cdot dx$ મેળવો.

વિભાગ - D

નીચેના 41 થી 50 પ્રશ્નો કે જે દરેકનાં ત્રણ ગુણ છે, તેના માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

30

41. $A(2\sqrt{2}, 0)$ અને $B(-2\sqrt{2}, 0)$ છે. જો $|AP - PB| = 4$ હોય તો, P ના બિન્દુગણનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

$A(x_1, x_1 \tan\theta_1)$, $B(x_2, x_2 \tan\theta_2)$, $C(x_3, x_3 \tan\theta_3)$

$(0 < \theta_i < \pi/2, x_i > 0, i = 1, 2, 3)$ થી બનતા ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ઉગમબિન્દુ હોય તથા

તેના મધ્યકેન્દ્રના યામ (x, y) હોય તો સાબિત કરો કે

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3}$$

42. જો $3x^2 + (3-p)xy + qy^2 - 2px = 8pq$ વર્તુળ દર્શાવે તો, p અને q શોધો તથા વર્તુળનું કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા શોધો.

43. 5, 3, 1 એકમ બળ અનુક્રમે (6, 2, 3), (3, -2, 6) અને (2, -3, -6) દિશામાં લાગે છે. અને કણ (2, -1, -3) થી (5, -1, 1) સુધી ખસે છે. તો પરિણામી બળ તથા તેનાથી થતું કાર્ય શોધો.

44. (1, 2, 3) માથી પસાર થતી તથા રેખાઓ $\vec{r} = (0, 0, 0) + K(1, 2, -1)$, $K \in R$ અને $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ ને લંબરેખાનું સદિશ તથા કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

અથવા

જે $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ તથા l, m, n બે રેખાની દિક્કોસાઈન હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

45. રેખાઓ $\vec{r} = (1, 2, 3) + K(2, 3, 4)$, $K \in R$ અને $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ ને સમાવતાં સમતલનું સદિશ તથા કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

46. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x - \cos(\sin^{-1}x)}{1 - \tan(\sin^{-1}x)}$ મેળવો.

47. સાબિત કરો કે જો $x > 0$ તો $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$

48. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx$ સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવો.

49. $\int_8^{27} \frac{dx}{x - \sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \log\left(\frac{8}{3}\right)$ સાબિત કરો.

50. $xy \cdot \frac{dy}{dx} = y+2$ ઉકેલો. જો $y(2) = 0$ હોય, તો આપેલા સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

અથવા

એક શહેરની વસ્તી પ્રતિવર્ષ 3% ના દરે વધે છે. આ શહેરની વસ્તી કેટલા વર્ષમાં બમણી થશે ?

વિભાગ - E

નીચેના 51 થી 54 પ્રશ્નો કે જે દરેકના પાંચ ગુણ છે. તેના માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

20

51. ΔABC માં A ના યામ $(-4, -5)$ છે. તથા વેધને સમાવતી રેખાઓના સમીકરણ $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$ હોય તો, B અને C ના યામ શોધો.

52. $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$ તો સાબિત કરો કે f એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

અથવા

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, m, n \in N \text{ મેળવો.}$$

53. $x = \sin t$ અને $y = \sin pt$ હોય તો, સાબિત કરો કે $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + p^2y = 0$

54. $\int \frac{1}{1+5e^x + 6e^{2x}} \cdot dx$ મેળવો.

અથવા

$$\int \frac{\sec x}{1 + \operatorname{Cosec} x} \cdot dx \text{ મેળવો.}$$